非線形波動方程式系の解のlifespanについて (非線形波動および分散型方程式に関する研究)

数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 128-139

非線形波動方程式系の解の lifespan について

和歌山大学・教育学部数学教室 片山聡一郎 (Soichiro Katayama)
Department of Mathematics, Wakayama University

1. 主結果

本稿を通じて $\partial_0=\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_j=\partial_{x_j}=\partial/\partial x_j$ $(j=1,2,3)$ という記法を用いることにする. なお本稿の主結果 (定理 1.2 と定理 1.4) は, 松村昭孝 氏 (大阪大学) と筆者との共同研究によるものである.

さて, 次のような半線形波動方程式系に対する初期値問題を考える:

$$
(\mathrm{CP})_\varepsilon \begin{cases} \Box_{c_I} u_I = F_I\bigl(u,\partial u\bigr) & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3\ (I=1,\cdots,m), \\ u(0,x)=\varepsilon f(x),\ (\partial_t u)(0,x)=\varepsilon g(x) & \text{for } x\in\mathbb{R}^3. \end{cases}
$$

ここで $c>0$ に対して

$$
\Box_c=\partial_t^2-c^2\sum_{j=1}^{3}\partial_j^2
$$

であり, c_I $(1\le I\le m)$ は与えられた正の定数とする. また, $u=(u_J)_{J=1,\cdots,m}$, $\partial u=(\partial_a u_J)_{\substack{J=1,\cdots,m\\ a=0,1,2,3}}$ である.

簡単のため, $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^m)$ と仮定する. さらに, 非線形項

$$
F(u,\partial u)=\bigl(F_1(u,\partial u),\cdots,F_m(u,\partial u)\bigr)
$$

は u と ∂u の適当に滑らかな関数であると仮定する. このとき, 局所解の一意存在が保障される.

さて, 初期値問題 $(\mathrm{CP})_\varepsilon$ の解の最大存在時間 (lifespan) T_ε を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
T_\varepsilon =&T_\varepsilon(f,g,F)\\
&=\sup\bigl\{T\in(0,\infty);(\mathrm{CP})_\varepsilon \text{ の解 } u(t,x) \text{ が } (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3 \text{ で存在する}\bigr\}.
\end{aligned}
$$

$T_\varepsilon=\infty$ のとき, 大域解を持つといい, $T_\varepsilon<\infty$ のときには, 解は有限時間で爆発するという. 初期値を小さなものに限定した場合には, 次の 2 つのいずれか一方が必ず成立する.

(GE) 十分に小さな初期値に対しては, 大域解が存在する. 正確に述べると, 任意の f, $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^m)$ に対して, ある正定数 ε_0 が存在して, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ ならば $T_\varepsilon=\infty$ が成立する.

(BU) どんなに初期値を小さくしても, 有限時間で解が爆発することがある. より正確には, ある f, $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^m)$ が存在して, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $T_\varepsilon<\infty$ が成立する.

1.1. **非線形項が u のみに依存する場合**. 本節では, $F = F(u)$ の場合を扱う. 以下では $\Box_1 = \partial_t^2 - \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2$ のことを単に $\Box$ と書くことにする.

まず $m = 1$ の場合に, 次のような方程式を考えよう.

$$\Box u = |u|^{p-1}u. \tag{1.1}$$

この場合, $p_c = 1 + \sqrt{2}$ が, (GE) と (BU) のどちらが成立するかの境目となる. すなわち, $p > p_c$ の場合には (GE) が成立し, $1 < p \le p_c$ の場合には (BU) が成立することが知られている ([2], [4], [19], [20], [22], [24] 等を参照のこと; なお, 非線形項が $|u|^p$ の場合も全く同じ結果が成り立つ).

2 つの項を足し合わせた方程式, 例えば

$$\Box u = |u|^{p-1}u + |u|^{q-1}u \tag{1.2}$$

という方程式 (ただし $q \ge p$) を考えても, やはり $p > p_c$ ならば (GE) が成立し, $1 < p \le p_c$ ならば (BU) が成立することに注意しておく.

これと比べると, $m \ge 2$ の場合は状況が複雑である. 次の方程式系を考える:

$$\begin{cases} \Box_{c_1} u_1 = A_1 u_1 u_2 + B_1 u_2^3, \\ \Box_{c_2} u_2 = A_2 u_1 u_2 + B_2 u_1^3. \end{cases} \tag{1.3}$$

ここで A_j, B_j $(j = 1, 2)$ は実定数, c_j $(j = 1, 2)$ は正定数である.

$A_1 = A_2 = 0$ の場合には, $3 > p_c$ であることから予想される通りに, (GE) が成り立つ.

$B_1 = B_2 = 0$ の場合は, c_1 と c_2 の関係により 2 通りに分かれる. $c_1 = c_2$ のときは, $2 < p_c$ であることから予想されるように, (BU) が成立する. 他方, $c_1 \ne c_2$ の場合には (GE) が成立することが知られている ([16]). これは, 伝播速度の違いにより非線形項 $u_1 u_2$ の影響が弱くなるからである.

ここで, $c_1 \ne c_2$ の場合に, 一般の A_j と B_j $(j = 1, 2)$ に対して, (1.3) を考えてみよう. 先に述べたように $A_1 = A_2 = 0$ もしくは $B_1 = B_2 = 0$ のときには, (GE) が成立する. このことから単純に考えれば, 一般の A_j と B_j $(j = 1, 2)$ に対しても, (GE) が成立すると考えるのは自然であるように思われる (単独方程式 (1.2) と比較せよ). ところが, 実際にはこれは正しくないことが, 次の Kubo – Ohta [16] の結果から分かる:

定理 1.1 (Kubo – Ohta [16]). (1.3) で $A_1 = B_2 = 1$ かつ $B_1 = A_2 = 0$ とする[1].

このとき,

(1) $c_1 < c_2$ ならば (GE) が成立する.

---

[1]実際に彼らが考察した方程式は

$$\begin{cases} \Box_{c_1} u_1 = |u_1 u_2|, \\ \Box_{c_2} u_2 = |u_1|^3. \end{cases}$$

であるが, 基本解の正値性に注意すれば, 証明に全く変更なくこの場合も扱える.

(2) $c_1 > c_2$ のときに成り立つのは (BU) である．より正確には，ある $f,\ g \in C_0^\infty$ と，ある正定数 C^* が存在して

$$T_\varepsilon \le \exp(C^*\varepsilon^{-3}) \tag{1.4}$$

が成立する．

ここで，(1.4) で得られた lifespan の上限の評価は最適 (sharp) な評価であるかどうかという問題が考えられる[2]．この問題に対する解答を与えるのが本稿の目的のひとつである．

Lifespan が $\exp(C\varepsilon^{-k})$ のような評価を持つ場合を almost global であるというが，sharp な結果であるとき，単独方程式等に対してこれまでに知られている多くの場合には，$k+1$ は非線形項の (最低次の項の) 次数と一致する．(1.4) においては $k=3$ であり，$k+1=4$ は (1.3) の最低次の次数 2 とも，もう一方の項の次数 3 とも一致しない．それにも関わらず，実は (1.4) の評価は sharp であることが次の定理から分かる．

定理 1.2. $(\mathrm{CP})_\varepsilon$ において，$F=F(u)$ は $u=0\in\mathbb{R}^m$ の近傍で

$$F_I(u) = G_I(u) + H_I(u) \quad (I=1,\cdots,m), \tag{1.5}$$

$$G_I(u) = \sum_{(J,K)\in R} C_{JK}^I\, u_J u_K, \tag{1.6}$$

$$|H_I(u)| \le C|u|^3 \tag{1.7}$$

を満たすと仮定する．ただし

$$R = \{(J,K)\in\{1,\cdots,m\}\times\{1,\cdots,m\};\, c_J\ne c_K\} \tag{1.8}$$

であり，C_{JK}^I は実定数である．

このとき，任意の $f,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^m)$ に対してある正定数 ε_0 と C_* が存在し，$0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ ならば

$$T_\varepsilon \ge \exp(C_*\varepsilon^{-3}) \tag{1.9}$$

が成立する．

(1.3) は定理 1.2 の仮定を満たすから，(1.4) の評価が最適であること，そして逆に定理 1.2 の結果も最適なものであることが分かる．

定理 1.2 の証明は第 3 節で与える．

1.2. **非線形項が u と ∂u の双方に依存する場合.** 本節では $F=F(u,\partial u)$ の場合について簡単に述べる．

単独方程式 ($m=1$) の場合，非線形項が 3 次以上のときには，無条件に (GE) が成り立つが，2 次の非線形項の場合には，一般には (GE) は成立しない．例えば $\square u=(\partial_t u)^2$ や $\square u = u(\partial_t u)$ に対しては (BU) が成り立つ ([5])．(GE) が成り立つよ

[2]ただし，ここでは T_ε の ε への依存の仕方のみを問題とし，(1.4) の定数 C^* が最適かどうかは問題にしないものとする．

うな 2 次の非線形項は, 例えば null form と呼ばれるものがあるが, 本稿では詳細は割愛する ([14], [3] 等を参照のこと).

$m \geq 2$ のとき, 伝播速度が異なる場合には null form 以外にも (GE) が成り立つような非線形項が知られている. これまでに知られている結果を一般の形で述べると煩雑になるので, ここでは, 次のような方程式系を例にとって考えよう:

$$\begin{cases} \square_{c_1} u_1 = A_1 u_2(\partial_t u_1) + B_1(\partial_t u_1)(\partial_t u_2) + C_1 u_2(\partial_t u_2) + D_1(\partial_t u_2)^2, \\ \square_{c_2} u_2 = A_2 u_1(\partial_t u_2) + B_2(\partial_t u_1)(\partial_t u_2) + C_2 u_1(\partial_t u_1) + D_2(\partial_t u_1)^2. \end{cases} \tag{1.10}$$

ここで c_j は正定数, A_j, B_j, C_j と D_j は実定数 $(j = 1, 2)$ とする. また, $c_1 \neq c_2$ と仮定する. 以下のような場合に, (GE) の成立が知られている:

(I) $A_j = C_j = 0$ $(j = 1, 2)$ ([1], [10], [15], [17], [21], [23] 参照),
(II) $A_j = B_j = D_j = 0$ $(j = 1, 2)$ ([9] 参照),
(III) $C_j = D_j = 0$ $(j = 1, 2)$ ([11] 参照).

上記の (I) – (III) に対する (GE) は全て, 任意の 3 次以上の非線形項を付け加えても成立することに注意しておく.

上記以外の場合の (1.10) を考えてみよう. 例えば, 上記の (II) と (III) のタイプの混合形ともいえる

(IV) $A_1 = B_1 = D_1 = 0$ かつ $C_2 = D_2 = 0$ (もしくは $A_2 = B_2 = D_2 = 0$ かつ $C_1 = D_1 = 0$)

に対しては (GE) が成り立つ ([13]; [12] も参照のこと). ところが (I) と (III) を混合したタイプの方程式系を考えたとき, 一般には (GE) は成り立たないことが, 次の Ohta ([18]) の例より分かる.

定理 1.3 (Ohta [18]). (1.10) において $C_1 = D_1 = 0$ かつ $A_2 = C_2 = 0$ と仮定する. さらに, $A_1 = D_2 = 1$ かつ $B_1 = B_2 = 0$ とする. このとき, $c_1 < c_2$ ならば (BU) が成立する. より正確には, ある $f, g \in C_0^\infty$ とある正定数 C^* が存在して

$$T_\varepsilon \leq \exp\left(C^* \varepsilon^{-2}\right) \tag{1.11}$$

である.

ここで 1.1 節と同様に (1.11) の評価が最適かどうかという問題が考えられる. この例でも非線形項は 2 次であるにも関わらず, lifespan の評価は一般に予想される $\exp(C^* \varepsilon^{-1})$ の形にはなっていないことに注意する. 次の定理により, 少なくとも球対称な初期条件に考察を限定する限り, (1.11) の結果は最適であることが分かる:

定理 1.4. $(\mathrm{CP})_\varepsilon$ において $F = \widetilde{F}(u, \partial_t u)$ は, $(u, \partial_t u) = (0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ の近傍で,

$$\widetilde{F}_I(u, \partial_t u) = G_I(u, \partial_t u) + H_I(u, \partial_t u) \quad (I = 1, \cdots, m), \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} G_I(u, \partial_t u) = &\sum_{(J,K) \in R} \left\{ C^I_{JK} u_J(\partial_t u_K) + D^I_{JK}(\partial_t u_J)(\partial_t u_K) \right\} \\ &+ \sum_{(J,K) \in S_I} E^I_{JK}(\partial_t u_J)(\partial_t u_K), \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$|H_I(u, \partial_t u)| \leq C\left(|u|^3 + |\partial_t u|^3\right) \tag{1.14}$$

という形であると仮定する．ただし

$$R=\{(J,K)\in(1,\cdots,m)\times(1,\cdots,m);c_J\neq c_K\}, \tag{1.15}$$

$$S_I=\{(J,K)\in(1,\cdots,m)\times(1,\cdots,m);c_J=c_K\neq c_I\} \tag{1.16}$$

であり，C^I_{JK}, D^I_{JK} と E^I_{JK} は実定数である．

また，初期値 f, $g\in C^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ は，ある関数 ϕ, $\psi\in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}_+}\right)$ を用いて

$$f(x)=\phi(|x|),\quad g(x)=\psi(|x|) \tag{1.17}$$

と書けるものとする．

このとき，正定数 ε_0 と C_* が存在して，$0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ ならば，

$$T_\varepsilon\geq\exp(C_*\varepsilon^{-2}) \tag{1.18}$$

が成立する．

定理 1.4 の証明に関しては，簡単な方針のみを第3節の最後で述べることにする．

我々の証明は，球対称ではない場合には適用できない．球対称解に限定しないときに，定理 1.4 で扱ったような方程式系に対して lifespan の評価がどうなるのかという問題は未解決である．また，現時点で (1.11) が得られているのは $c_1<c_2$ の場合だけであるから，$c_1>c_2$ の場合には，球対称解に限定しても (1.18) が最適であるかどうかは不明である．

2. 線形波動方程式の解の L^∞ - L^∞ 評価

$(t,r)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ と $c\geq0$ に対して，

$$w_+(t,r)=1+t+r, \tag{2.1}$$

$$w_c(t,r)=1+|ct-r| \tag{2.2}$$

と定義する．また $c_1,\cdots,c_m$ が与えられているとき，

$$w_-(t,r)=\min_{J=1,\cdots,m}w_{c_J}(t,r) \tag{2.3}$$

とおく．$c_J\neq c_K$ のとき，$0<\rho_1\leq\rho_2$ ならば

$$w_{c_J}(t,r)^{-\rho_1}w_{c_K}(t,r)^{-\rho_2}\leq Cw_+(t,r)^{-\rho_1}w_-(t,r)^{-\rho_2} \tag{2.4}$$

が任意の $(t,r)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ に対して成立する．

$\phi,\psi\in C^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ に対して，$U^*_c[\phi,\psi]$ を線形波動方程式

$$\begin{cases}\Box_cU^*_c[\phi,\psi](t,x)=0 & \text{for } (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3,\\ U^*_c[\phi,\psi](0,x)=\phi(x),\ \partial_tU^*_c[\phi,\psi](0,x)=\psi(x) & \text{for } x\in\mathbb{R}^3\end{cases} \tag{2.5}$$

の解とする．また，$\Phi=\Phi(t,x)$ に対して，$U_c[\Phi](t,x)$ を線形波動方程式

$$\begin{cases}\Box_cU_c[\Phi](t,x)=\Phi(t,x) & \text{for } (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3,\\ U_c[\Phi](0,x)=\partial_tU_c[\Phi](0,x)=0 & \text{for } x\in\mathbb{R}^3\end{cases} \tag{2.6}$$

の解とする．

このとき, 次のような評価が成り立つ:

補題 2.1. $c>0$, $\rho>0$ とする. ϕ, $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ に対して,

$$w_+(t,|x|)w_c(t,|x|)^\rho|U_c^*[\varepsilon\phi,\varepsilon\psi](t,x)|\le C\varepsilon \tag{2.7}$$

が成立する. ここで C は, ϕ, ψ, c と ρ のみに応じて決まる定数である.

証明: 例えば Asakura [2] を参照のこと.

補題 2.2. $c>0$, $\kappa\ge 0$, $\mu\ge 0$ とする. $\Psi_\mu(t)$ を

$$\Psi_\mu(t)=\begin{cases}1 & (\mu>0 \text{ のとき}),\\ \log(2+t) & (\mu=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

と定義する.

このとき,

$$\begin{aligned}&w_+(t,|x|)w_c(t,|x|)^{1+\kappa}|U_c[\Phi](t,x)|\\ &\qquad\le C\Psi_\mu(t)\sup_{(\tau,y)\in[0,t]\times\mathbb{R}^3}w_+(\tau,|y|)^{3+\kappa}w_-(\tau,|y|)^{1+\mu}|\Phi(\tau,y)|\end{aligned} \tag{2.8}$$

が成立する. ここで C は, c と μ と κ のみに応じて決まる定数である.

証明: $c=1$ として一般性を失わない. このとき John [6] による解の表現を用いると, $U_1[\Phi]$ は

$$U_1[\Phi](t,x)=\frac{1}{4\pi r}\int_0^t d\tau\int_{|r-(t-\tau)|}^{r+t-\tau}\lambda d\lambda\int_0^{2\pi}\Phi\Big(\tau,\lambda\Theta\big(\tau,\lambda,\varphi;t,x\big)\Big)d\varphi \tag{2.9}$$

と表される. ここで $r=|x|$ であり, また Θ は3次元球面上に値をとる関数である(具体的な表現も求められるが, ここでは省略する).

$$I_{\kappa,\mu}(t,r)=\frac{1}{r}\int_0^t d\tau\int_{|r-(t-\tau)|}^{r+t-\tau}w_+(\tau,\lambda)^{-(2+\kappa)}w_-(\tau,\lambda)^{-(1+\mu)}d\lambda \tag{2.10}$$

とおく. (2.9) を用いると, 求める評価式を出すためには

$$I_{\kappa,\mu}(t,r)\le C\Psi_\mu(t)w_+(t,r)^{-1}w_1(t,r)^{-(1+\kappa)} \tag{2.11}$$

を示せばよいことが分かる.

$r\ge 2\left(1+\max\limits_{J=1,\cdots,m}c_J\right)t$ のとき, $w_1(t,r)\ge Cw_+(t,r)$ であり, また被積分領域において $w_-(\tau,\lambda)\ge Cw_+(\tau,\lambda)$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}I_{\kappa,\mu}(t,r)\le&I_{\kappa,0}(t,r)\le\frac{C}{r}\int_0^t d\tau\int_{r-t+\tau}^{r+t-\tau}w_+(\tau,\lambda)^{-(3+\kappa)}d\lambda\\ \le&\frac{C}{r}\int_0^t(1+r-t+2\tau)^{-(2+\kappa)}d\tau\\ \le&\frac{Ct}{r}w_1(t,r)^{-(2+\kappa)}\le Cw_+(t,r)^{-1}w_1(t,r)^{-(1+\kappa)}\end{aligned}$$

となり, (2.11) を得る.

以下では, $r \leq 2\left(1+\max_{J=1,\cdots,m} c_J\right)t$ と仮定する. $J=1,\cdots,m$ に対して

$$I_{J,\kappa,\mu}(t,r)=\frac{1}{r}\int_0^t d\tau\int_{|r-(t-\tau)|}^{r+t-\tau} w_+(\tau,\lambda)^{-(2+\kappa)}w_{c_J}(\tau,\lambda)^{-(1+\mu)}d\lambda \tag{2.12}$$

とおくと,

$$I_{\kappa,\mu}(t,r)\leq\sum_{J=1}^m I_{J,\kappa,\mu}(t,r) \tag{2.13}$$

を得るから, (2.11) を示すためには, 各 $I_{J,\kappa,\mu}$ が (2.11) の右辺で評価されることを示せば十分である.

さて,

$$p=\tau+\lambda,\ q=\lambda-c_J\tau \tag{2.14}$$

とおいて変数変換を行うと

$$I_{J,\kappa,\mu}(t,r)=\frac{1}{(c_J+1)r}\int_{|t-r|}^{t+r}(1+p)^{-2-\kappa}dp\int_{p_J}^{p}(1+|q|)^{-(1+\mu)}dq \tag{2.15}$$

を得る. ここで $2p_J=(1-c_J)p+(1+c_J)(r-t)$ である. $p\geq|r-t|$ のとき $p_J\geq -c_Jp$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} I_{J,\kappa,\mu}(t,r)\leq&\frac{C}{r}\int_{|t-r|}^{t+r}(1+p)^{-2-\kappa}dp\int_{-c_Jp}^{p}(1+|q|)^{-(1+\mu)}dq\\ \leq&\frac{C}{r}\Psi_\mu(t)\int_{|t-r|}^{t+r}(1+p)^{-2-\kappa}dp \end{aligned} \tag{2.16}$$

を得る.

$$\int_{|t-r|}^{t+r}(1+p)^{-2-\kappa}dp\leq(t+r-|t-r|)w_1(t,r)^{-2-\kappa}\leq 2rw_1(t,r)^{-2-\kappa}$$

であるから, (2.16) より

$$I_{J,\kappa,\mu}(t,r)\leq C\Psi_\mu(t)w_1(t,r)^{-2-\kappa} \tag{2.17}$$

を得る. $r\leq t/2$ または $r\leq 1/2$ のときには $w_+(t,r)\leq Cw_1(t,r)$ であるから, (2.17) より (2.11) が得られる.

他方, $r\geq t/2$ かつ $r\geq 1/2$ のときには $r\geq Cw_+(t,r)$ であることと,

$$\int_{|t-r|}^{t+r}(1+p)^{-2-\kappa}dp\leq Cw_1(t,r)^{-1-\kappa}$$

であることに注意すると, (2.16) から (2.11) が示される. □

3. 定理の証明

3.1. **定理 1.2 の証明.** まず (1.5) に現れる $G_I(u)$ を用いて, 次の初期値問題を考える:

$$\begin{cases}\square_{c_I} v_I = G_I(v_I) \quad (I = 1, \cdots, m), \\ v(0,x) = \varepsilon f(x), \ (\partial_t v)(0,x) = \varepsilon g(x).\end{cases} \tag{3.1}$$

第1節で述べたように, この方程式系に対しては大域解が存在する. より正確には

補題 3.1. ある正定数 ε_0 が存在して, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば初期値問題 (3.1) の解

$$v \in C^\infty\big([0,\infty) \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^m\big)$$

が存在する. さらに $\kappa > 0$ に対して, 正定数 C_0 が存在して, 評価式

$$w_+(t,|x|) w_{c_I}(t,|x|)^{1+\kappa} |v_I(t,x)| \le C_0 \varepsilon \quad (I = 1, \cdots, m) \tag{3.2}$$

が $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ に対して成立する.

証明:

$$e_1(T) = \sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} \sum_{I=1}^m w_+(t,|x|) w_{c_I}(t,|x|)^{1+\kappa} |v_I(t,x)|$$

とおく. $0 \le t < T$ のとき, $c_J \ne c_K$ ならば

$$|(u_J u_K)(t,x)| \le w_+^{-2} w_{c_J}^{-1-\kappa} w_{c_K}^{-1-\kappa} e_1(T)^2 \le C w_+^{-3-\kappa} w_-^{-1-\kappa} e_1(T)^2$$

であるから

$$|G_I\big(v(t,x)\big)| \le C w_+(t,|x|)^{-3-\kappa} w_-(t,|x|)^{-1-\kappa} e_1(T)^2$$

を得る (C は T に依存しないことに注意). よって, 補題 2.1 と 補題 2.2 ($\mu = \kappa$ とる) を用いると

$$e_1(T) \le C\big(\varepsilon + e_1(T)^2\big) \tag{3.3}$$

を得る. この式から, よく知られた議論 (continuity argument や bootstrap argument と呼ばれるもの) を用いると, ε が十分小さければ, (3.2) が解が存在する範囲では成立することが分かる. この a priori 評価と局所解の存在定理を組み合わせれば, 時間大域解の存在も分かる. $\square$

u を $(\mathrm{CP})_\varepsilon$ の解, v を今得られた (3.1) の解とする. $V = u - v$ とおくと, $(\mathrm{CP})_\varepsilon$ と (3.1) から V は

$$\begin{cases}\square_{c_I} V_I = \sum_{(J,K)\in R} C^I_{JK} (v_J V_K + V_J v_K + V_J V_K) + H_I(v + V), \\ V(0,x) = (\partial_t V)(0,x) = 0\end{cases} \tag{3.4}$$

を満たすことが分かる. 逆に (3.4) の解 V が存在すれば, $u = v + V$ とおくことにより $(\mathrm{CP})_\varepsilon$ の解が得られる. 以上より $(\mathrm{CP})_\varepsilon$ の解の lifespan と (3.4) の解の lifespan は一致することが分かる. そこで $(\mathrm{CP})_\varepsilon$ の代わりに (3.4) を解くことを考える.

以下, V を (3.4) の $0 \le t < T_\varepsilon$ における古典解とし, $0 < T \le T_\varepsilon$ に対し

$$e_2(T) = \sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} \sum_{I=1}^{m} w_+(t,|x|) w_{c_I}(t,|x|) |V_I(t,x)| \tag{3.5}$$

とおく. V の連続性より e_2 は連続関数となる. また, $V(0,x) = V_t(0,x) = 0$ であるから, $\lim_{T\to 0} e_2(T) = 0$ が成立する.

$c_J \neq c_K$ とする. (2.4) を思い出すと, $0 \le t < T(< T_\varepsilon)$ において

$$v_J V_K \le C_0 \varepsilon w_+^{-2} w_{c_J}^{-(1+\kappa)} w_{c_K}^{-1} e_2(T) \le C C_0 \varepsilon e_2(T) w_+^{-3} w_-^{-(1+\kappa)} \tag{3.6}$$

となることが分かるから, 補題 2.2 より

$$\sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} w_+(t,|x|) w_{c_I}(t,|x|) |U_{c_I}[v_J V_K](t,x)| \le C C_0 \varepsilon e_2(T) \tag{3.7}$$

である. 同様に

$$\sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} w_+(t,|x|) w_{c_I}(t,|x|) |U_{c_I}[V_J v_K](t,x)| \le C C_0 \varepsilon e_2(T) \tag{3.8}$$

を得る. 他方,

$$V_J V_K \le w_+^{-2} w_{c_J}^{-1} w_{c_K}^{-1} e_2(T)^2 \le C e_2(T)^2 w_+^{-3} w_-^{-1} \tag{3.9}$$

であるから, 補題 2.2 より

$$\sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} w_+(t,|x|) w_{c_I}(t,|x|) |U_{c_I}[V_J V_K](t,x)| \le C e_2(T)^2 \log(2+T) \tag{3.10}$$

である.

最後に

$$\begin{aligned} |H_I(v+V)| \le C(|v|^3 + |V|^3) &\le C C_0^3 \varepsilon^3 w_+^{-3} w_-^{-3(1+\kappa)} + C w_+^{-3} w_-^{-3} e_2(T)^3 \\ &\le C(C_0^3 \varepsilon^3 + e_2(T)^3) w_+^{-3} w_-^{-3} \end{aligned} \tag{3.11}$$

であるから, 再び補題 2.2 より

$$\sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} w_+(t,|x|) w_{c_I}(t,|x|) |U_{c_I}[H_I](t,x)| \le C(C_0^3 \varepsilon^3 + e_2(T)^3) \tag{3.12}$$

となる.

以上で得られた評価式をまとめると

$$e_2(T) \le C_1 \left(C_0 \varepsilon e_2(T) + C_0^3 \varepsilon^3 + e_2(T)^3 + e_2(T)^2 \log(2+T) \right) \tag{3.13}$$

が $0 < T < T_\varepsilon$ に対して得られた. ここで C_1 は T とは独立な定数である.

さて, 定理 1.2 の証明に入ろう. もし $T_\varepsilon = \infty$ ならば, 明らかに定理 1.2 の結果が成立するから, 以下では $T_\varepsilon < \infty$ とする.

$M > 0$ をとり,

$$T^* = \sup\left\{ T \in [0, T_\varepsilon); e_2(T) \le M\varepsilon^3 \right\}$$

とおく. $\lim_{T\to 0} e_2(T) = 0$ だから, e_2 の連続性より $T^* > 0$ であることが分かる. さらに $T^* < T_\varepsilon$ である. なぜなら, もし $T^* = T_\varepsilon$ ならば, $e_2(T^*) \le M\varepsilon^3$ という a priori

評価があることになり, T_ε を越えて解が延長できることが分かるが, これは lifespan T_ε の定義と矛盾するからである.

$0<T^*<T_\varepsilon$ であるから, (3.13) より

$$\begin{aligned} e_2(T^*) \le& C_1\left(C_0M\varepsilon^4+C_0^3\varepsilon^3+M^3\varepsilon^9+M^2\varepsilon^6\log(2+T^*)\right) \\ \le& C_1\left\{C_0\varepsilon+C_0^3M^{-1}+M^2\varepsilon^6+M\varepsilon^3\log(2+T_\varepsilon)\right\}M\varepsilon^3 \end{aligned} \tag{3.14}$$

となることが分かる.

さて, まず

$$C_1C_0^3M^{-1}\le\frac{1}{8}$$

となるように十分大きな M をひとつとる. 次に

$$C_1C_0\varepsilon_1\le\frac{1}{8},\ C_1M^2\varepsilon_1^6\le\frac{1}{8}$$

を満たすような十分小さい ε_1 をとる.

ここで

$$C_1M\varepsilon^3\log(2+T_\varepsilon)\le\frac{1}{8} \tag{3.15}$$

であると仮定する. このとき, $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$ ならば (3.14) より

$$e_2(T^*)\le\frac{1}{2}M\varepsilon^3 \tag{3.16}$$

を得る. $T^*<T_\varepsilon$ であること, 及び e_2 の連続性に注意すると, ある $\widetilde{T}\in(T^*,T_\varepsilon)$ がとれて, $e_2(\widetilde{T})\le M\varepsilon^3$ となることが (3.16) から分かる. これは T^* の定義と矛盾する. よって仮定 (3.15) は誤りであり

$$\log(2+T_\varepsilon)>\frac{1}{8C_1M}\varepsilon^{-3}$$

である. 従って, 適当に C_* をとれば $T_\varepsilon\ge\exp(C_*\varepsilon^{-3})$ となることが分かる. これで定理 1.2 が示された. □

3.2. 定理 1.4 の証明. 基本的には定理 1.2 の証明と同様の方針で定理 1.4 を示すことができる. 補題 2.2 に加えて, $\partial_t u$ に対する $L^\infty-L^\infty$ 評価が必要になるが, いささか煩雑な計算を必要とするので, 本稿では詳細は省いて, ごく大まかな方針のみを述べる.

まず

$$\begin{cases} \square_{c_I}v_I=\sum_{(J,K)\in R}\left\{C^I_{JK}v_J(\partial_tv_K)+D^I_{JK}(\partial_tv_J)(\partial_tv_K)\right\}+H_I(v,\partial_tv), \\ v(0,x)=\varepsilon f(x),\ (\partial_tv)(0,x)=\varepsilon g(x) \end{cases} \tag{3.17}$$

という方程式系を解く. これは第 1.2 節で述べた (III) の形であり, 大域解を持つ. また, $\kappa\in(0,1)$ に対して

$$w_+(t,|x|)w_{c_I}(t,|x|)|u_I(t,x)|+w_0(t,|x|)w_{c_I}(t,|x|)^{1+\kappa}|\partial_tu_I(t,x)|\le C_0\varepsilon \tag{3.18}$$

という評価式が $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ で成り立つことも分かる.

次に, 先程と同様に $V = u - v$ に対する方程式系を考える. (3.18) を用いると $T \le \exp(C_* \varepsilon^{-2})$ ならば,

$$w_+(t,|x|)\log\left(\frac{w_+(c_I t,|x|)}{w_{c_I}(t,|x|)}\right)|u_I(t,x)| + w_0(t,|x|)w_{c_I}(t,|x|)|\partial_t u_I(t,x)| \le C_1\varepsilon^2$$

が $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^3$ に対して成立することが分かる. これにより定理 1.4 が示される. □

なお, 球対称解でなければ, 一般には $\partial_t u$ の評価に微分のロスが生じ, 上記の量に着目しただけでは評価が閉じないことに注意しておく. このロスを解消するためには, 例えば解のエネルギー等を評価する必要がでてくるが, 現時点では残念ながらうまく評価できていない. これが定理 1.4 で解が球対称であることを仮定した理由である.

References

[1] R. Agemi and K. Yokoyama, *The null condition and global existence of solutions to systems of wave equations with different speeds*, in Advances in nonlinear partial differential equations and stochastics, edited by S.Kawahara and T.Yanagisawa, Series on Adv. Math. for Appl. Sci., Vol. **48**, World Scientific, 1998, 43–86.

[2] F. Asakura, *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions*, Comm. in Partial Differential Equations **11** (1986), 1459 – 1487.

[3] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 267 – 282.

[4] F. John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235 – 268.

[5] F. John, *Blow-up for quasi linear wave equations in three space-dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 29 – 51.

[6] F. John, *Lower bounds for the life span of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 1 – 35.

[7] S. Katayama, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **29** (1993), 1021 – 1041.

[8] S. Katayama, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions, II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **31** (1995), 645 – 665.

[9] S. Katayama, *Global existence for a class of systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, preprint.

[10] S. Katayama, *Global and almost global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, preprint.

[11] S. Katayama, *Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms*, preprint.

[12] S. Katayama, 非線形波動方程式系に対する存在定理, 「非線形双曲型方程式系の解の挙動に関する研究」数理解析研究所講究録 **1331**, 15 –33.

[13] S. Katayama and K. Yokoyama, in preparation.

[14] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lectures in Applied Math. **23** (1986), 293 – 326.

[15] M. Kovalyov, *Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations*, J. Differential Equations **77** (1989), 73 – 83.

[16] H. Kubo and M. Ohta, *On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions*, preprint.
[17] K. Kubota and K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation*, Japanese J. Math. **27** (2001), 113-202.
[18] M. Ohta, 半線形波動方程式系の解の爆発, 「非線形波動方程式系の解の挙動に関する研究」数理解析研究所講究録 **1331** (2003), 34 –49.
[19] J. Schaeffer, *The equation* $\Box u = |u|^p$ *for the critical value of* p, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **101A** (1985), 31 – 44.
[20] T. C. Sideris, *Global behavior of solutions to nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 1283 – 1323.
[21] T. C. Sideris and Shun-Yi Tu, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 477 –488.
[22] H. Takamura, *An elementary proof of the exponential blow-up for semilinear wave equations*, Math. Meth. Appl. Sci. **17** (1994), 239 – 249.
[23] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 609 – 632.
[24] Zhou Yi, Blow up of classical solutions to $\Box u = |u|^{1+\alpha}$ in three space dimensions, J. Partial Differential Equations **5** (1992), 21 – 32.